FOGLIO 5: AUTOVALORI, AUTOVETTORI, ENDOMORFISMI SEMPLICI

Esercizi

1) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito da $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$. Calcolare gli autovalori ed una base per ogni autospazio di f. Dire se f è un endomorfismo semplice.

2) Dire se la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

3)Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo associato alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$. Calcolare autovalori, autovettori, ed una base per ogni autospazio di f. Dire se f è semplice.

4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' endomorfismo definito da $f(x, y) = (x+3y, 2x+2y)$. Verificare che f è invertibile e che f^{-1} è semplice. Calcolare gli autovalori di f e confrontarli con quelli di f^{-1}. Ripetere il confronto tra gli autospazi.

5) Trovare gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e quelli della matrice $A + 2I$. Qual è la relazione tra gli autovalori? Dopo aver trovato gli autospazi delle due matrici, stabilire la relazione esistente.

6) Dopo aver scritto l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verificante tutte le condizioni seguenti

(1) $(1, 2)$ è un autovettore di f relativo all' autovalore 1;
(2) $(0, 1)$ è un vettore di $\ker f$;

verificare che f è semplice. Si può affermare che f è semplice guardando le sole condizioni (1), (2)? Ripetere l' esercizio sostituendo la condizione (2) con $(3) f(1, 1) = f(1, 0)$; ovvero con $(3') f(1, 1) = (1, 2)$.

7) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l' endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associato alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & 2 \end{bmatrix}$ è semplice.

8) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' endomorfismo che associa ad ogni vettore $\mathbf{v}$ il vettore $f(\mathbf{v})$ ottenuto ruotando $\mathbf{v}$ di $\pi/4$ in senso antiorario. Scrivere la matrice associata ad f e verificare che f non ha autovalori.

Quiz

1)Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo associato alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(A) f è iniettiva;
(B) $(1, 1, -1)$ è un autovettore di f;
(C) $(1, 1, -1)$ è un autovalore di f;
(D) 2 è un autovalore di f.

2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo associato alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(prodotto righe $\times$ colonne).

(A) $(2,1,-1)$ è un autovettore di f;
(B) $(1,2,1) \in \ker f$;
(C) $(1,2,1)$ è un autovettore per f relativo all' autovalore 3;
(D) $(1,2,1)$ è un autovettore per f relativo all' autovalore 1.

3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' endomorfismo che assicia ad ogni vettore $\mathbf{v}$ il vettore $f(\mathbf{v})$ ottenuto ruotando $\mathbf{v}$ di $\pi/2$ in senso antiorario.

(A) f non ha autovalori;
(B) ogni vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore per f;
(C) f è semplice;
(D) $\mathbf{i} \in \ker f$.

4) Se $f(x,y) = (x+3y, 2y)$ allora f è semplice. (V) (F)

5) Se $f(x,y) = (x,x)$ allora $(1,1)$ è autovettore di f relativo all' autovalore 2.

(V) (F)

6) Se $f(1,0) = f(0,1)$ allora $(1,-1)$ è autovettore di f relativo all' autovalore 0.

(V) (F)

Soluzioni

1) Autovalori: $\lambda = 2$(semplice); Autospazi: $V(2) = \{(y,y,y)/y \in \mathbb{R}\}$ ed una base è $\{(1,1,1)\}$. f non è semplice perché il polinomio caratteristico ha radici non reali.
2) Autovalori: -1(doppio), 2(semplice); Autospazi: $V(-1) = \{(x,y,-x-y)/x,y \in \mathbb{R}\}$ con base $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, $V(2) = \{(y,y,y)/y \in \mathbb{R}\}$ con base $\{(1,1,1)\}$. A è diagonalizzabile perché abbiamo tre autovettori l.i., ossia l' endomorfismo associato ad A è semplice. La matrice P ha per colonne gli autovettori delle basi di $V(-1)$ e di $V(2)$, e quindi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Autovalori: 0(semplice), 1(doppio). Autospazi:$V(0) = \{(x,-x,0)/x \in \mathbb{R}\}$ con base $\{(1,-1,0)\}$, $V(1) = \{(x,0,3x)/x \in \mathbb{R}\}$ con base $\{(1,0,3)\}$. f non è semplice.
4) La matrice associata ad f è $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\det A = -4$, ossia f è invertibile. Autovalori di $f^{-1} : -1, 1/4$(entrambi semplici) e quindi f^{-1} è semplice. Autovalori di $f : -1, 4$ e sono gli inversi di quelli di f^{-1}. Gli autospazi sono uguali.
5) Gli autovalori di A sono $1,4$, mentre quelli di $A+2I$ sono $3,6$, ossia $\lambda_A + 2 = \lambda_{A+2I}$. Gli autospazi corrispondenti sono uguali.
6) La condizione (2) dice che $(0,1)$ è autovettore per f associato all' autovalore 0, e quindi f è semplice perché $\mathbb{R}^2$ ha una base formata da autovettori. Matrice associata: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Autovalori: $0,1$ entrambi semplici. Negli altri due casi, abbiamo che la matrice associata è sempre la stessa.
7) L' endomorfismo è semplice per $k > -1/4$.
8) Se $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, allora $f(\mathbf{v}) = \sqrt{2}/2((x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j})$. Il polinomio caratteristico ha delta negativo, e quindi non abbiamo radici reali.
QUIZ: 1) B; 2) C; 3) A; 4) V; 5) F; 6) V.