GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA
RISOLUZIONE DELLA UNDICESIMA SERIE DI ESERCIZI

PRIMO ESERCIZIO

Consideriamo due matrici di Jordan A e B dello stesso ordine n e che abbiano come unico autovalore 0. La molteplicità algebrica di 0 rispetto a entrambe le matrici è n. La molteplicità geometrica di 0 è uguale al numero di blocchi di Jordan. Supponendo che 0 abbia la medesima molteplicità geometrica s rispetto a entrambe le matrici, indichiamo con $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s$ gli ordini dei blocchi di Jordan di A e con $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ gli ordini dei blocchi di Jordan di B. Risulta allora $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$. La condizione che 0 abbia lo stesso indice rispetto a entrambe le matrici si esprime con l'uguaglianza $n_1 = m_1$. Se $s = 1$ ovviamente le due matrici sono uguali. Se $s = 2$ le condizioni che abbiamo enunciato danno $n_1 = m_1$ e $n_2 = m_2$ ovvero le due matrici contengono, a meno dell'ordine, gli stessi blocchi di Jordan. Se $s = 3$, le condizioni si riducono a $n_1 = m_1$ e $n_2+n_3 = m_2+m_3$. Possiamo allora scegliere $n_2 = n_3 = 2$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 1$. Possiamo infine scegliere $n_1 = m_1 = 3$. Dunque le due matrici A e B di $M(7, \mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica 7, molteplicità geometrica 3 e indice 3 ma non sono simili.

SECONDO ESERCIZIO

Le matrici considerate, avendo polinomio caratteristico totalmente riducibile, sono tutte Jordanizzabili. Ciascuna classe di equivalenza può dunque essere rappresentata da una matrice di Jordan, e due matrici di Jordan rappresentano la stessa classe di equivalenza se e solo se si possono ottenere una dall'altra scambiando l'ordine dei blocchi di Jordan.
Determiniamo le matrici di Jordan con polinomio caratteristico $\lambda^2 (\lambda - 1)^3$: dunque l'ordine complessivo dei blocchi di Jordan relativo all'autovalore 0 è 2, mentre l'ordine complessivo dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 è 3. Possiamo dunque avere 1 blocco di ordine 2 o 2 blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 0, e 1 blocco di ordine 3 oppure 1 blocco di ordine 2 e 1 di ordine 1

oppure 3 blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 1. Abbiamo dunque in tutto 6 classi di equivalenza rappresentate dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TERZO ESERCIZIO

Due matrici reali sono simili se e solo se hanno la medesima forma canonica di Jordan, eventualmente a coefficienti complessi. Calcoliamo allora i polinomi caratteristici delle due matrici:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1-\lambda)^2,$$

$$\det(B_k - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & k \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

Dunque le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico per ogni valore di k. Gli autovalori di entrambe le matrici sono 0 di molteplicità algebrica 1 e 1 di molteplicità algebrica 2. Pertanto nella forma canonica di Jordan di entrambe le matrici è presente un blocco di ordine 1 relativo all'autovalore 0 e 1 blocco di ordine 2 o 2 blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 1. Per verificare quale di questi due casi sussiste calcoliamo la molteplicità algebrica di 1 relativamente alle due matrici. Risulta:

$$\mathrm{mg}_A(1) = 3 - \mathrm{car}(A - I) = 3 - \mathrm{car}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathrm{mg}_{B_k}(1) = 3 - \mathrm{car}(B_k - I) = 3 - \mathrm{car}\begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede allora che $\mathrm{mg}_A(1) = \mathrm{mg}_{B_k}(1)$ se e solo se $k \neq 0$. Pertanto A e B_k sono simili se e solo se $k \neq 0$.
Determiniamo ora una matrice di passaggio da A a B_k con $k \neq 0$. Per far ciò determiniamo una matrice che Jordanizza A e una matrice che Jordanizza B_k. Consideriamo innanzitutto la matrice A. Un autovettore $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ relativo all'autovalore 0 si ottiene dalla relazione $A^t\mathbf{v}_1 = 0$, che fornisce il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -x \phantom{{}+y} - z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

che risolto dà le relazioni $y = z = -x$. Possiamo allora scegliere ad esempio $\mathbf{v}_1 = (1, -1, -1)$. Per quanto riguarda l'autovalore 1, sappiamo già che nella forma canonica di Jordan di A è presente un solo blocco di Jordan relativo a tale autovalore di dimensione 2. Consideriamo allora l'endomorfismo η di $\mathbf{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice A, sia $\eta_1 = \eta - I$ e calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica tramite η_1 e η_1^2:

$$\begin{array}{lclcl} \mathbf{e}_1 & \to & -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \to & 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 & \to & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{e}_3 & \to & -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 & \to & \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{array}$$

Consideriamo allora la catena di autovettori generalizzati:

$$\mathbf{0} \leftarrow \mathbf{v}_2 \leftarrow \mathbf{v}_3.$$

Dobbiamo dunque scegliere $\mathbf{v}_3 \in \ker \eta_1^2 - \ker \eta_1$, ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \eta_1(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_2$. Consideriamo ora la matrice

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ rispetto alla base canonica. Risulta allora $R^{-1}AR = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ripetiamo il medesimo procedimento per B_k. Un autovettore $\mathbf{u}_1 = (x, y, z)$ relativo all'autovalore 0 si ottiene dalla relazione ${B_k}^t\mathbf{u}_1 = 0$, che fornisce il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x - y + kz = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che risolto dà le relazioni $x = y$ e $z = 0$. Possiamo allora scegliere ad esempio $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$. Per quanto riguarda l'autovalore 1, sappiamo già che nella forma canonica di Jordan di B_k è presente un solo blocco di Jordan relativo a tale autovalore di dimensione 2. Consideriamo allora l'endomorfismo θ di $\mathbf{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice B_k, sia $\theta_1 = \theta - I$ e calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica tramite θ_1 e θ_1^2:

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{e}_1 & \to & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{e}_2 & \to & -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 & \to & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 & \to & k\mathbf{e}_1 & \to & \mathbf{0} \end{array}$$

Consideriamo allora la catena di autovettori generalizzati:

$$\mathbf{0} \leftarrow \mathbf{u}_2 \leftarrow \mathbf{u}_3.$$

Dobbiamo dunque scegliere $\mathbf{u}_3 \in \ker \theta_1^2 - \ker \theta_1$, ad esempio scegliamo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{u}_2 = \theta_1(\mathbf{u}_3) = k\mathbf{e}_1$. Consideriamo ora la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ rispetto alla base canonica. Risulta allora $S^{-1}B_kS = J$. Dunque si ha $S^{-1}B_kS = R^{-1}AR$. Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza a sinistra per S e a destra per S^{-1} troviamo la relazione $B_k = SR^{-1}ARS^{-1}$. Posto allora $M = RS^{-1}$ troviamo la relazione $B_k = M^{-1}AM$.

QUARTO ESERCIZIO

Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

Dunque A è Jordanizzabile poiché il suo polinomio caratteristico è totalmente riducibile. Inoltre A ha come unico autovalore 0 di molteplicità algebrica 4 Consideriamo l'endomorfismo η_0 di $\mathbf{R}^4$ associato alla matrice $A - 0 \cdot I$ rispetto alla base canonica, e calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η_0. Proseguiamo finché determiniamo un intero i_0 tale che $\dim \operatorname{Im} \eta_0^{i_0} = \dim \operatorname{Im} \eta_0^{i_0+1}$:

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{e}_1 & \to & \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 & \to & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \to & \mathbf{e}_3 & \to & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \to & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{e}_4 & \to & \mathbf{e}_3 & \to & \mathbf{0} \end{array}$$

Abbiamo dunque verificato che $\dim \operatorname{Im} \eta_0 = 2$ e $\dim \operatorname{Im} \eta_0^2 = 0$. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_0 & \subset & \ker \eta_0^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_3 & \leftarrow & \mathbf{v}_4 \end{array}$$

Occorre dunque scegliere $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_4$ in modo tale che $\ker \eta_0^2 = \ker \eta_0 \oplus \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle$ (attenzione: non è sufficiente scegliere $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_4$ linearmente indipendenti in $\ker \eta_0^2 - \ker \eta_0$). Determiniamo allora una base per $\ker \eta_0$: questa ad esempio può essere costituita dai vettori $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4$ ed $\mathbf{e}_3$. Completiamo questa base per ottenere una base di $\ker \eta_0^2$ ovvero di $\mathbf{R}^4$. Possiamo ad esempio scegliere $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_2$. Determiniamo così $\mathbf{v}_1 = \eta_0 (\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$ e $\mathbf{v}_3 = \eta_0 (\mathbf{v}_4) = \mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$