La forma canonica di Jordan

1 Introduzione.

Sia $f : \Re^n \longrightarrow \Re^n$ un endomorfismo. Abbiamo in precedenza analizzato in quali casi tale endomorfismo sia diagonalizzabile, cioé quando esista una base di $\Re^n$ composta da autovettori di f, rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo si presenti in forma diagonale. In sostanza abbiamo visto che, quando f é diagonalizzabile, tutte le matrici che si possono ad esso associare, in una qualsiasi base di $\Re^n$, sono tra loro simili e tutte simili ad una matrice diagonale. Abbiamo concluso che non tutti gli endomorfismi, e quindi non tutte le matrici, sono diagonalizzabili. Ci proponiamo ora di affrontare l'analisi di una classe di matrici sufficientemente semplici, in modo tale che ogni matrice quadrata sui reali sia simile ad una di esse, e di conseguenza ogni endomorfismo possa essere rappresentato, in una qualche base, da una di queste matrici, dette forme canoniche. Fra tutte tali forme, certamente la piú semplice é la forma canonica di Jordan.

Diciamo Blocco di Jordan di ordine p e relativo allo scalare $\alpha \in \Re$, la matrice

$$J_p(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

cioé gli elementi a_{ij} della matrice sono

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad i = j \\ 1 & \text{se} \quad j = i + 1 \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

Diremo che una matrice $A \in M_n(\Re)$ é in forma canonica di Jordan se essa presenta la seguente forma diagonale a blocchi di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_3}(\alpha_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{n_4}(\alpha_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{n_{r-1}}(\alpha_{r-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{n_r}(\alpha_r) \end{bmatrix}$$

dove ogni $J_{n_i}(\alpha_i)$ é un blocco di Jordan di ordine n_i relativo ad un qualche scalare α_i ed ovviamente $\sum_i n_i = n$.

Esempio 1 *.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(3) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(4) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(3) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1(4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(5) \end{bmatrix}.$$

Notiamo allora che le matrici diagonali sono delle particolari matrici di Jordan, con un numero di blocchi pari all'ordine della matrice stessa ed ogni blocco ha ordine 1.

Teorema. *Sia $A \in M_n(\Re)$ una matrice il cui polinomio caratteristico abbia tutte radici reali. Allora esiste una matrice non singolare $C \in M_n(\Re)$ tale che la matrice $C^{-1}AC$ sia in forma canonica di Jordan. In altre parole, per ogni endomorfismo f di $\Re^n$ avente tutti gli autovalori nel campo reale, esiste* *una base di $\Re^n$, rispetto alla quale, la matrice associata a tale endomorfismo sia in forma canonica di Jordan.*

Sia A la matrice e indichiamo con

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot (X - \lambda_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_h)^{r_h}$$

il suo polinomio caratteristico, in cui $\lambda_1, \lambda_2\lambda_3, ..., \lambda_h$ sono tutti gli autovalori di A, tra loro distinti e tali che l'autovalore λ_i abbia molteplicitá algebrica, come radice del polinomio caratteristico, pari a r_i, con $\sum_i r_i = n$. Indichiamo con A' la forma canonica di Jordan simile alla A. Gli scalari rispetto ai quali i blocchi di Jordan della A' vengono costruiti sono proprio gli autovalori della matrice A, cioé per ogni autovalore di A esiste almeno un blocco di Jordan in A'.

A questo punto, per poter effettivamente costruire la matrice nella sua forma canonica di Jordan, é necessario rispondere alle due seguenti domande:
1) Quanti sono i blocchi di Jordan relativi a ciascun autovalore?
2) Quale deve essere l'ordine di ciascun blocco?

2 Numero totale di blocchi relativi ad uno stesso autovalore.

Sia λ un autovalore di A con molteplicitá geometrica pari a m, cioé sia $dim(V_\lambda) = m$, dove V_λ é l'autospazio associato a λ. Supponiamo che tutti gli autovalori di A siano reali, quindi esiste una forma canonica di Jordan A' di A. Allora il numero di blocchi di Jordan in A' relativi all'autovalore λ é proprio m.

In particolare, per ogni autovalore per il quale le molteplicitá algebrica e geometrica coincidano (diciamo m per entrambi i valori), allora nella A' compaiono m blocchi relativi all'autovalore e tutti con ordine 1.

Esempio 2 *.
Sia $A \in M_2(\Re)$ con autovalori λ_1, λ_2.

Se i due autovalori sono distinti, allora sappiamo che la dimensione geometrica di entrambi é 1, per cui esiste un blocco di Jordan per ognuno dei due autovalori e ciascun blocco ha ordine 1, cioé la matrice é diagonalizzabile, la forma di Jordan coincide con quella diagonale ed essa é $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Se i due autovalori coincidono ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) e la dimensione dell'autospazio associato é 2, allora esitono due blocchi di Jordan relativi all'autovalore, ciascuno con ordine 1. Anche in questo caso la matrice é diagonalizzabile e la forma canonica di Jordan si riduce alla semplice forma diagonale $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Se i due autovalori coincidono ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) ma la dimensione dell'autosazio associato é 1, allora esiste un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore, ed esso deve avere necessariamente ordine 2. La forma canonica di Jordan é in tale caso $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Esempio 3 *.

Sia $A \in M_3(\Re)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Re$ gli autovalori di A.

Se i tre autovalori sono tutti distinti allora la matrice é diagonalizzabile. Infatti ogni autospazio ha dimensione 1 e quindi esiste un solo blocco relativo ad ogni autovalore ed ogni blocco ha ordine 1. La forma canonica di Jordan si riduce a quella diagonale ed é $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Supponiamo ora che $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e λ_3 sia distinto dai primi due.

Se la molteplicitá geometrica di λ é 2, allora vi sono due blocchi di Jordan relativi a λ ed ovviamente uno relativo a λ_3, per cui ciascun blocco dovrá avere ordine 1, e la matrice é diagonalizzabile, con forma canonica $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Al contrario, se la molteplicitá geometrica di λ é 1, allora esiste un solo blocco di Jordan relativo a λ. Poiché il blocco relativo a λ_3 deve necessariamente avere ordine 1, allora il blocco relativo a λ ha ordine due, e la forma canonica é $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Infine consideriamo il caso in cui i tre autovalori siano tutti coincidenti col valore λ.

Se la molteplicitá geometrica dell'autovalore é anche 3, allora la forma canonica di Jordan si riduce a forma diagonale $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Se la molteplicitá geometrica dell'autovalore é 2 allora esistono due blocchi di Jordan relativi ad esso, quindi uno di questi avrá ordine 2 e l'altro avrá ordine 1. La forma canonica sará $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Se la molteplicitá geometrica dell'autovalore é 1, esiste un solo blocco di Jordan relativo ad esso e la forma canonica é $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

3 Ordine massimo di un blocco relativo ad un certo autovalore.

Quanto detto fino ad ora é sufficiente per determinare una eventuale forma canonica di una matrice con un ordine due o tre. Occupiamoci ora di come determinare gli ordini dei blocchi relativi ad un autovalore, nel caso in cui la matrice $A \in M_n(\Re)$ da riportare in forma canonica A' abbia un ordine superiore o uguale a 4.

Sia λ uno degli autovalori della matrice A. Si consideri $B = A - \lambda I$, dove I sia la matrice identica di ordine n. Supponiamo che $B^m = 0$ per qualche intero m (si dice in tal caso che la matrice B é nilpotente). Indichiamo con

$$r = min\{t \in N \quad : \quad B^t = 0\}$$

dove indichiamo con 0 la matrice nulla (con ogni elemento nullo). Chiamiamo r indice di nilpotenza di B.

Supponiamo quindi che la matrice B si nilpotente. Allora esisterá certamente almeno un blocco di Jordan relativo a λ che abbia ordine r ed ogni altro eventuale blocco di Jordan relativo a λ avrá un ordine minore o al piú uguale a r.

Ripetendo tale calcolo per ogni autovalore, avremo un panorama completo degli ordini massimi dei blocchi relativi ad ogni autovalore della matrice.

Esempio 4 *.
Sia $A \in M_6(\Re)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico é $det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^6$, cioé $\lambda = 1$ é autovalore con molteplicitá algebrica 6.

L'autospazio associato é

$$V = \{(a-b, -b, a, 0, b, b), \quad a, b \in \Re\}$$

che ha quindi dimensione 2. Vi sono allora due blocchi relativi all'autovalore $\lambda = 1$.

Calcolando l'indice di nilpotenza della matrice $B = A - \lambda I = A - I$, si avrá $B^5 = 0$, cioé uno dei due blocchi ha ordine 5, quindi l'altro deve avere necessariamente ordine 1. La forma canonica della matrice é

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_5(1) & 0 \\ 0 & J_1(1) \end{bmatrix}.$$

Esempio 5 *.
Sia $A \in M_6(\Re)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico é $det(A - \lambda I) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, cioé $\lambda_1 = 2$ é autovalore con molteplicitá algebrica 1, quindi esisterá un solo blocco relativo ad esso ed avrá ordine 1.

$\lambda_2 = 0$ é autovalore con molteplicitá algebrica 3, mentre l'autospazio ad esso associato ha dimensione 1. Esiste allora un solo blocco di Jordan ad esso relativo.

Infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 1$ ha dimensione 2, quindi vi sono due blocchi di Jordan ad esso relativi, necessariamente entrambi di ordine 1.

La forma canonica sará:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(2) \end{bmatrix}.$$

Esempio 6 *.
Sia $A \in M_3(\Re)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 39 \\ 0 & -5 & -14 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico é $(\lambda - 1)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$. Quindi un autovalore é $\lambda_1 = -1$ con molteplicitá algebrica e geometrica pari ad 1, per cui ad esso é associato un solo blocco di Jordan di ordine 1.

L'altro autovalore é $\lambda_2 = 1$ con molteplicitá algebrica 2. La dimensione dell'autospazio ad esso associato é 1, quindi vi é un solo blocco ad esso corrispondente, ed ovviamente deve avere ordine 2. La forma canonica della matrice é allora

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4 Numero di blocchi di uno certo ordine relativi ad uno stesso autovalore.

Sia al solito $A \in M_n(\Re)$ con autovalori $h_1, ..., h_m$. Fissiamo un h_0 autovalore di A. Abbiamo precedentemente visto che il numero totale di blocchi di Jordan relativi a h_0 é pari alla dimensione dell'autospazio associato a h_0, cioé la molteplicitá geometrica di h_0. Inoltre l'ordine massimo di questi blocchi é dato dall'indice t di nilpotenza della matrice $A - h_0 I$.

Ci proponiamo ora di risolvere l'ultimo problema nella costruzione della forma canonica di Jordan di una matrice: fissiamo l'intero $k \leq t$. Ci chiediamo quanti blocchi di ordine k sono associati all'autovalore h_0.

Useremo la seguente notazione:

$$r_i = rango(A - h_0 I)^i, \quad \text{per ogni} \quad i = 1, 2, 3, ..., t.$$

Se $k = 1$ allora il numero di blocchi di ordine 1 relativi a h_0 é pari a

$$n - 2r_1 + r_2.$$

Per $k \geq 2$ vale la seguente tabella, in cui sono riportati a sinistra gli ordini di tutti i blocchi che eventualmente si possono presentare, e a destra il numero di tali blocchi:

ORDINE DEI BLOCCHI	NUMERO DEI BLOCCHI
2	$r_1 - 2r_2 + r_3$
3	$r_2 - 2r_3 + r_4$
4	$r_3 - 2r_4 + r_5$
5	$r_4 - 2r_5 + r_6$
6	$r_5 - 2r_6 + r_7$
...	....
...	....
...	....
k	$r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'equazione caratteristica é $det(A - hI) = (1-h)^5(2-h)^3 = 0$, da cui otteniamo gli autovalori $h_1 = 1$ con molteplicitá algebrica 5, $h_2 = 2$ con molteplicitá algebrica 3.

L'autospazio relativo all'autovalore $h_1 = 1$ ha dimensione 2, quindi vi sono 2 blocchi di Jordan relativi a tale autovalore. Inoltre:

$$A - h_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 6, quindi $r_1 = 6$.

$$
(A-h_1I)^2=\begin{bmatrix} 0&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&6&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&7\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}
$$

che ha rango 4, quindi $r_2 = 4$.

$$
(A-h_1I)^3=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&9&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&7\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}
$$

che ha rango 3, quindi $r_3 = 3$.

$$
(A-h_1I)^4=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&12&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&7\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}
$$

che ha rango 3, quindi $r_4 = 3$. Quindi

ORDINE DEI BLOCCHI	NUMERO DEI BLOCCHI
1	0
2	1
3	1

c'é un blocco di ordine 2 ed uno di ordine 3 relativi all'autovalore $h_1 = 1$.

Passiamo all'autovalore $h_2 = 2$.

$$A - h_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 6, quindi $r_1 = 6$ e vi sono in totale 2 blocchi relativi a tale autovalore.

$$(A - h_2 I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5, quindi $r_2 = 5$.

$$(A - h_2 I)^3 = \begin{bmatrix} -1 & 12 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5, quindi $r_3 = 5$. Quindi

ORDINE DEI BLOCCHI	NUMERO DEI BLOCCHI
1	1
2	1

c'é un blocco di ordine 1 ed uno di ordine 2 relativi all'autovalore $h_2 = 2$.

Quindi una forma canonica di Jordan della matrice di partenza é la seguente:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osservazione finale. L'ordine con cui i blocchi compaiono nella forma canonica di Jordan non é fondamentale per l'individuazione della forma canonica stessa. Si dice infatti che la forma canonica ottenuta é unica a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan di cui é composta. Permutando tali blocchi si ottiene comunque una forma canonica che sia simile a quella precedente. Tale permutazione corrisponde di fatto alla scelta di una differente base di $\Re^n$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta l'endomorfismo é ancora espressa in forma canonica di Jordan.

(*) Tutti gli esempi sono tratti da
Edoardo Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri.

5 Esercizi.

Esercizio 5.1 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.2 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.3 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.4 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 39 \\ 0 & -5 & -14 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.5 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.6 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$