

## Diagrammi di Bode

Da tenere a mente

- $G(s) = \frac{1}{F(s)}$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -|F(j\omega)|_{dB} \quad \angle G(j\omega) = -\angle F(j\omega) \quad \forall \omega$$

- $G(s) = F_1(s)F_2(s) \dots F_q(s)$

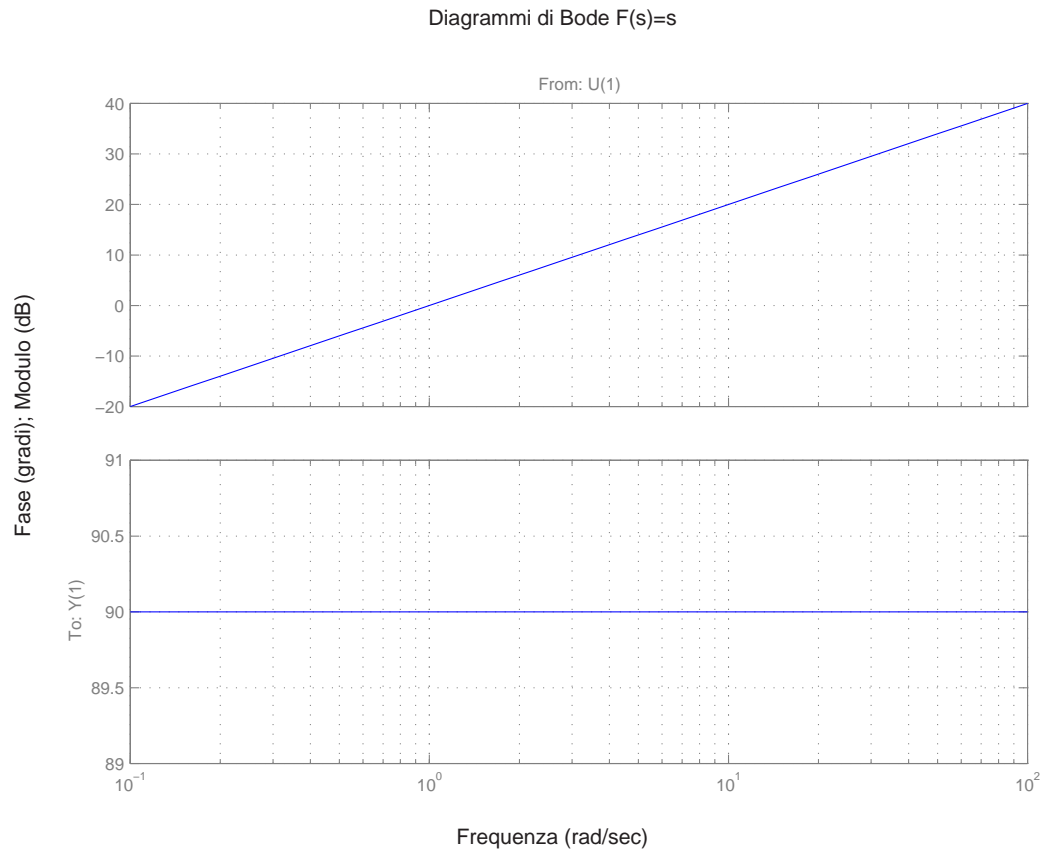
$$|G(j\omega)|_{dB} = \sum_{i=1}^q |F_i(j\omega)|_{dB} \quad \angle G(j\omega) = \sum_{i=1}^q \angle F_i(j\omega)$$

Diagramma di Bode di un guadagno

$$F(s) = k \in \mathbb{R} \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |k| \quad \angle F(j\omega) = 0^\circ$$

# Diagrammi di Bode

$$F(s) = s \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega \quad \angle F(j\omega) = 90^\circ$$



## Diagrammi di Bode

$$F(s) = \tau s + 1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 10 \log_{10}(1 + \omega^2 \tau^2) \quad \angle F(j\omega) = \arctan(\omega\tau)$$

Modulo

$$\omega \gg 1/\tau \rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10}(\omega\tau) = \underbrace{20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \tau}_{\substack{\text{asintoto alte} \\ \text{frequenze}}}$$

$$\omega \ll 1/\tau \rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx \underbrace{20 \log_{10} 1}_{\substack{\text{asintoto basse} \\ \text{frequenze}}} = 0dB$$

$$\omega = 1/\tau \rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 10 \log_{10} 2 \approx 3db$$

## Diagrammi di Bode

$$F(s) = \tau s + 1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 10 \log_{10}(1 + \omega^2 \tau^2) \quad \angle F(j\omega) = \arctan(\omega\tau)$$

Fase

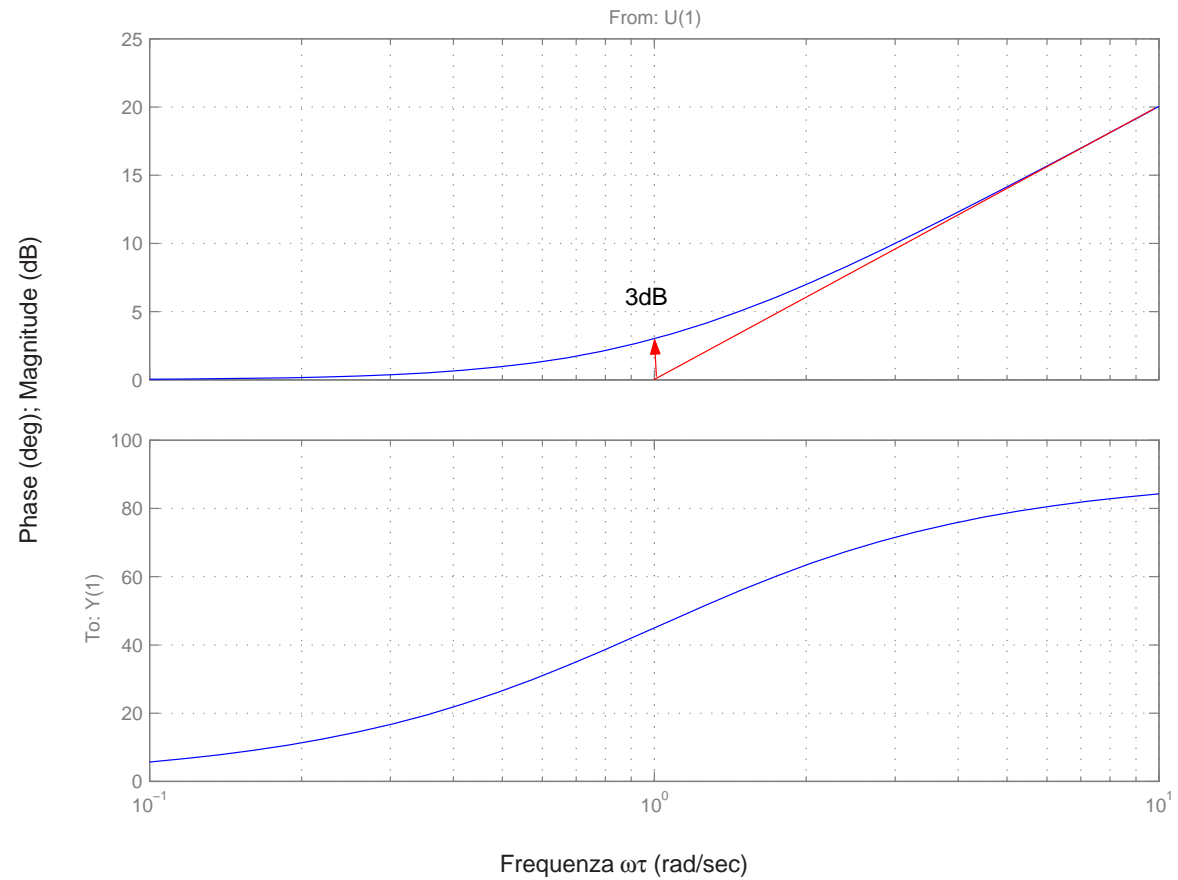
$$\omega \gg 1/\tau \Rightarrow \angle F(j\omega) \approx \underbrace{\arctan(+\infty)}_{\text{asintoto alte frequenze}} = 90^\circ$$

$$\omega \ll 1/\tau \Rightarrow \angle F(j\omega) \approx \underbrace{\arctan(0)}_{\text{asintoto basse frequenze}} = 0^\circ$$

$$\omega = 1/\tau \Rightarrow \angle F(j\omega) = 45^\circ$$

# Diagrammi di Bode

Bode Diagrams  $F(s)=\tau s+1$



## Diagrammi di Bode

$$F(s) = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1 \Rightarrow$$
$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
$$\angle F(j\omega) = \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx 40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} ; \quad \angle F(j\omega) \approx \arctan \frac{2\zeta}{-\frac{\omega}{\omega_n}} \rightarrow 180^\circ$$

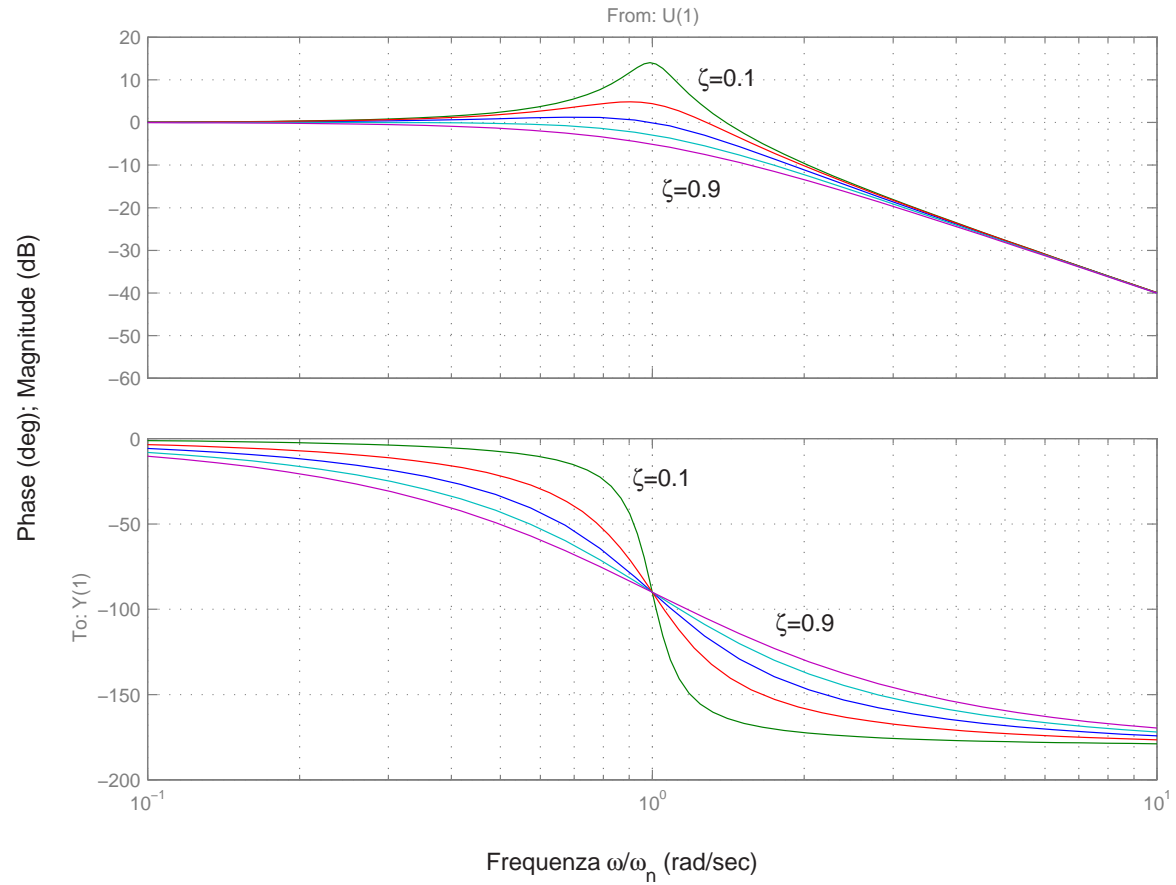
$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx 0dB ; \quad \angle F(j\omega) \approx \arctan \frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n}} \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega = \omega_n \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |2\zeta| ; \quad \angle F(j\omega) = 90^\circ$$

I diagrammi di Bode alla pagina seguente si riferiscono alla funzione  $F^{-1}(s)$

# Diagrammi di Bode

Bode Diagrams



## Sistema a controreazione unitaria a 1 d.o.f.

Per la figura di un sistema a controreazione unitaria a 1 d.o.f. si vedano gli appunti da lezione

$$U(s) = \frac{C(s)}{1 + G_0(s)C(s)} [R(s) - D_m(s) - D_0(s) - G_0(s)D_i(s)]$$
$$Y(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)C(s)} [G_0(s)C(s)(R(s) - D_m(s)) + D_0(s) + G_0(s)D_i(s)]$$

Se si sceglie  $C(s)$  per assegnare  $Y(s)/C(s)$  allora resta assegnate anche  $Y(s)/D_m(s)$ ,  $Y(s)/D_0(s)$ , etc.

## Sistema a controreazione unitaria a 2 d.o.f.

Per la figura di un sistema a controreazione unitaria a 2 d.o.f. si vedano gli appunti da lezione

$$U(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + G_0(s)C(s)}R(s) - \frac{C(s)}{1 + G_0(s)C(s)}(D_m(s) + D_0(s)) - \frac{G_0(s)C(s)}{1 + G_0(s)C(s)}D_i(s)]$$
$$Y(s) = \frac{G_0(s)C(s)H(s)}{1 + G_0(s)C(s)}R(s) - \frac{G_0(s)C(s)}{1 + G_0(s)C(s)}D_m(s) - \frac{1}{1 + G_0(s)C(s)}D_0(s) - \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)C(s)}D_i(s)]$$

## Funzioni di sensitività (fds)

Ogni fdt è uguale a una funzione di sensitività

$T_0(s) = \frac{G_0(s)C(s)}{1 + G_0(s)C(s)}$	fds complementare
$S_0(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)C(s)}$	fds
$S_{io}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)C(s)}$	fds ingresso/disturbo
$S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1 + G_0(s)C(s)}$	fds del controllo

Le funzioni di sensitività non sono indipendenti

$$S_0(s) + T_0(s) = 1 \quad S_{io}(s) = S_0(s)G_0(s) = \frac{T_0(s)}{C(s)} \quad S_{uo}(s) = S_0(s)C(s) = \frac{T_0(s)}{G_0(s)}$$

## Stabilità interna

**Def** Un sistema a controreazione unitaria si dice stabile internamente se tutte e 8 le funzioni di trasferimento sono stabili.

**Fatto** Un sistema a controreazione unitaria è internamente stabile se e solo se il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è stabile (tutti i poli a parte reale negativa).

Polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso  $p_{ch}(s)$  è il denominatore della fdt

$$\frac{G_0(s)C(s)}{1 + G_0(s)C(s)} \text{ (1d.o.f.) } \text{ o } \frac{G_0(s)C(s)H(s)}{1 + G_0(s)C(s)} \text{ (2d.o.f.)}$$

cioè

$$C(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} G_0(s) = \frac{\gamma(s)}{\delta(s)} \Rightarrow p_{ch}(s) = \beta(s)\delta(s) + \alpha(s)\gamma(s)$$

## Criterio di Routh

Per verificare stabilità di un polinomio. Si costruisce **tabella** di Routh.

**Es**  $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1$

Il numero di poli (radici) a parte reale non negativa di un polinomio è pari al numero delle inversioni di segno dei numeri che compaiono nella prima colonna della tabella di Routh.

### Casi particolari

- Un elemento della prima colonna della tabella è uguale a zero. Per completare la tabella occorre preventivamente sostituire l'elemento nullo con un numero positivo piccolo a piacere. **Es**  $s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 3s + 3$
- Tutti gli elementi di una riga della tabella si annullano: poli disposti simmetricamente rispetto all'origine. Sicuramente esistono poli a parte reale non strettamente negativa. Determinabili a partire dalla tabella di Routh. **Es**  $s^6 + 5s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 15s + 3$