Diagrammi di Bode: riepilogo

- I diagrammi di Bode si basano su alcune proprietà dei logaritmi e sulle proprietà valide per il modulo e l'argomento di funzioni complesse:

    1. $|A\ B| = |A|\,|B| \Rightarrow \log_{10}|A\ B| = \log_{10}|A| + \log_{10}|B|$
    2. $\left|\dfrac{A}{B}\right| = \dfrac{|A|}{|B|} \Rightarrow \log_{10}\left|\dfrac{A}{B}\right| = \log_{10}|A| - \log_{10}|B|$
    3. $\arg(A\ B) = \arg(A) + \arg(B)$
    4. $\arg\left(\dfrac{A}{B}\right) = \arg(A) - \arg(B)$

- Queste proprietà permettono di ricondurre il problema di tracciare i diagrammi di bode di una generica funzione razionale fratta

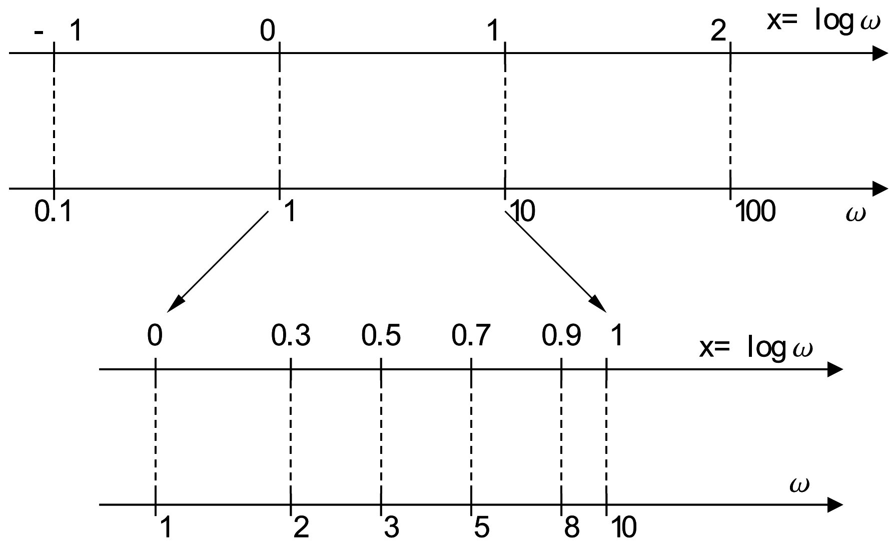
$$G(j\omega) = K\frac{(j\omega + b)...(-\omega^2 + 2\delta_b\omega_b j\omega + \omega_b^2)}{(j\omega)^h(j\omega + d)...(-\omega^2 + 2\delta_d\omega_d j\omega + \omega_d^2)}$$

alla "somma" dei diagrammi di Bode di 6 funzioni elementari:

$$\begin{aligned}
&\pm K\\
&(j\omega)^{-h}\\
&(j\omega + a)^{\pm 1}\\
&(-\omega^2 + 2\delta_a\omega_a j\omega + \omega_a^2)^{\pm 1}
\end{aligned}$$

- È possibile ricavare i diagrammi asintotici di Bode senza ricorrere alla somma dei singoli contributi, ma utilizzando un metodo diretto.

- I Diagrammi di Bode usano l'asse orizzontale in scala logaritmica. Considerando l'asse reale R e fissata una origine, una pulsazione ω corrisponde ad un punto sull'asse con coordinata $x = \log_{10} \omega$. Accanto all'asse si possono quindi indicare o i valori della coordinata x oppure direttamente i valori di ω; questa seconda soluzione è la più comoda.



- Per il disegno qualitativo dei diagrammi conviene memorizzare alcuni valori: $\log_{10} 2 \simeq 0.3 \quad \log_{10} 3 \simeq 0.5 \quad \log_{10} 5 \simeq 0.7 \quad \log_{10} 8 \simeq 0.9$

- L'asse verticale nei diagrammi di ampiezza è graduato in decibel (db):

$$A|_{\text{db}} \overset{def}{=} 20 \log_{10} A$$

  Con questa scala le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sono ± 20 db/decade e ± 40 db/decade. Per comodità tali pendenze si indicano rispettivamente con i SIMBOLI ± 1 e ± 2.

  N.B.: se la scala verticale fosse semplicemente logaritmica ($y = \log_{10} A$) le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sarebbero ± 1 e ± 2.

- L'asse verticale nei diagrammi di fase può essere graduato sia in radianti sia in gradi. In ogni caso il diagramma delle fasi può essere traslato verso l'alto o verso il basso di multipli interi di 2π o di 360^o mantenendo inalterato il suo significato.

Consideriamo come esempio la seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2}\frac{\left(1+\frac{s}{3}\right)}{s(1+5s)\left(1+\frac{3s}{20}+\frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Ordinare per ω crescente tutte le pulsazioni CRITICHE ovvero quelle corrispondenti a poli e zeri reali e alle pulsazioni naturali ω_n dei poli e degli zeri complessi e coniugati, non consideriamo in questa lista i poli nell'origine:

   $$\omega_1 = 0.2 \text{ (polo)} \qquad \omega_2 = 3 \text{ (zero)} \qquad \omega_3 = 10 \text{ (polo cc)}$$

   queste sono le pulsazioni in corrispondenza delle quali il diagramma di Bode delle ampiezze cambia pendenza.

2. Determinare la posizione verticale del diagramma. Detto K il guadagno di $G(s)$ nella forma a costanti di tempo, per un sistema di tipo h si determina il punto β attraversato dal diagramma asintotico per $\omega = \omega_1$ (la prima pulsazione alla quale si ha un cambio di pendenza) secondo la formula:

   $$\beta = \left|\frac{K}{\omega_1^h}\right| = \frac{\frac{3}{2}}{0.2^1} = \frac{15}{2} \simeq 17.5\text{db}$$

   Se il sistema è di tipo 0 (nessun polo nell'origine) la formula sopra restituisce esattamente il guadagno statico $G(0)$ del sistema.

3. Per $\omega < \omega_1$ la pendenza del diagramma di bode è $-h$.

4. A partire dal punto (ω_1, β), tenendo conto che gli zeri reali o complessi determinano un incremento di pendenza di +1 o +2 rispettivamente e che i poli reali o complessi determinano un decremento di pendenza di -1 o -2 rispettivamente, si traccia il diagramma asintotico spostandosi verso ω crescenti e aggiornando la pendenza in corrispondenza a ogni pulsazione critica.

Diagramma asintotico delle fasi

Consideriamo come esempio la seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2}\frac{\left(1+\frac{s}{3}\right)}{s(1+5s)\left(1+\frac{3s}{20}+\frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Determinare la fase iniziale φ_0 per $\omega \to 0_+$. Detto K il guadagno di $G(s)$ nella forma a costanti di tempo (nell'esempio $K = 3/2$) e dato un sistema di tipo h, la fase iniziale φ_0 si calcola come (nell'esempio $\varphi_0 = -h\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$):

$$\begin{array}{ll} K > 0 & \qquad \varphi_0 = -h\dfrac{\pi}{2} \\ K < 0 & \qquad \varphi_0 = -\pi - h\dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

2. Percorrendo le pulsazioni critiche in ordine crescente si determinano le fasce orizzontali in cui ogni polo o zero (semplice o complesso e coniugato) evidenzia il suo contributo sulla fase. Il primo polo o zero che si incontra (pulsazione ω_1) individua la fascia (φ_0,$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi_1$) dove $\Delta\varphi$ deriva dalle proprietà dei diagrammi di bode elementari:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -\pi/2 & \text{polo stabile o zero instabile} \\ \pi/2 & \text{zero stabile o polo instabile} \\ -\pi & \text{polo cc stabile o zero cc instabile} \\ +\pi & \text{zero cc stabile o polo cc instabile} \end{cases}$$

Successivamente l'i-esimo polo o zero che si incontra (pulsazione ω_i) individua la fascia (φ_{i-1},$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i$).

3. Tratteggiare il contributo in fase di ogni polo o zero all'interno della corrispondente fascia, riconducendosi alle proprietà dei diagrammi elementari. In particolare l'intervallo di pulsazioni (ω_{ai},ω_{bi}) all'interno del quale si ha la variazione di fase da φ_{i-1} a φ_i dovuta all'i-esimo polo o zero (pulsazione ω_i) è dato da:

$$\omega_{ai} = \frac{\omega_i}{4.81} \quad \omega_{bi} = 4.81\omega_i \quad \text{Poli o zeri semplici}$$
$$\omega_{ai} = \frac{\omega_i}{4.81^{\delta_i}} \quad \omega_{bi} = 4.81^{\delta_i}\omega_i \quad \text{Poli o zeri complessi e coniugati}$$

dove $\delta_i \in \,]-1, 1[$ è il coefficiente di smorzamento delle coppie di poli o zeri complessi e coniugati.

4. Partendo dalla pulsazione $\omega_1/10$ (dove la fase è sicuramente φ_0) e spostandosi verso ω crescente, unire i contributi in fase tratteggiati in precedenza. Nelle fasce verticali dove è presente un solo tratteggio inclinato il diagramma delle fasi coincide esattamente con il tratteggio. Nei tratti in cui due o più contributi si sommano, la pendenza complessiva del diagramma è data dalla somma algebrica delle pendenze dovute ai singoli contributi.

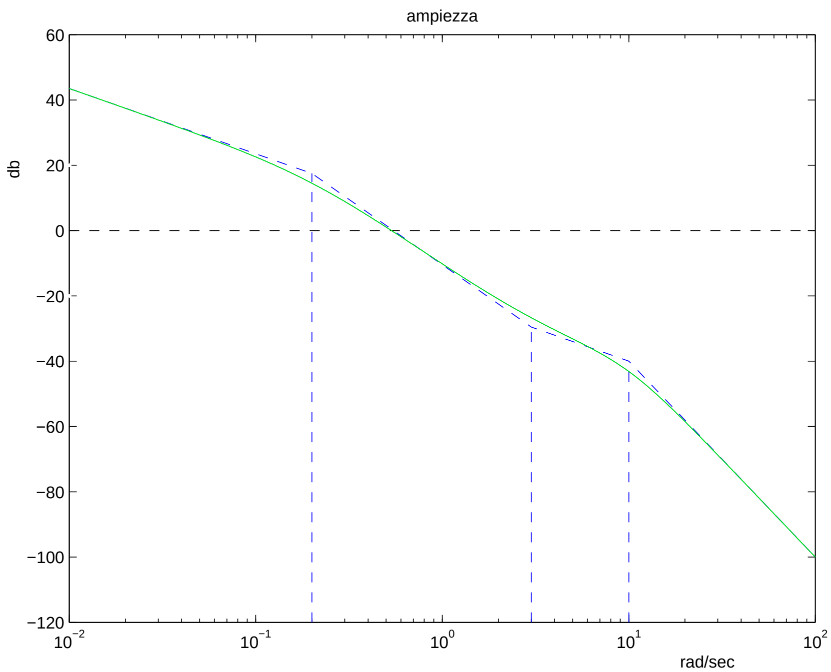
5. Detto K_p il guadagno del sistema nella forma poli-zeri, per una funzione $G(s)$ di grado relativo r, verificare la fase φ_∞ per $\omega \to \infty$ con la seguente espressione (nell'esempio $K_p = 10$, $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$):

$$K_p > 0 \qquad \varphi_\infty = -r\frac{\pi}{2}$$
$$K_p < 0 \qquad \varphi_\infty = -\pi - r\frac{\pi}{2}$$

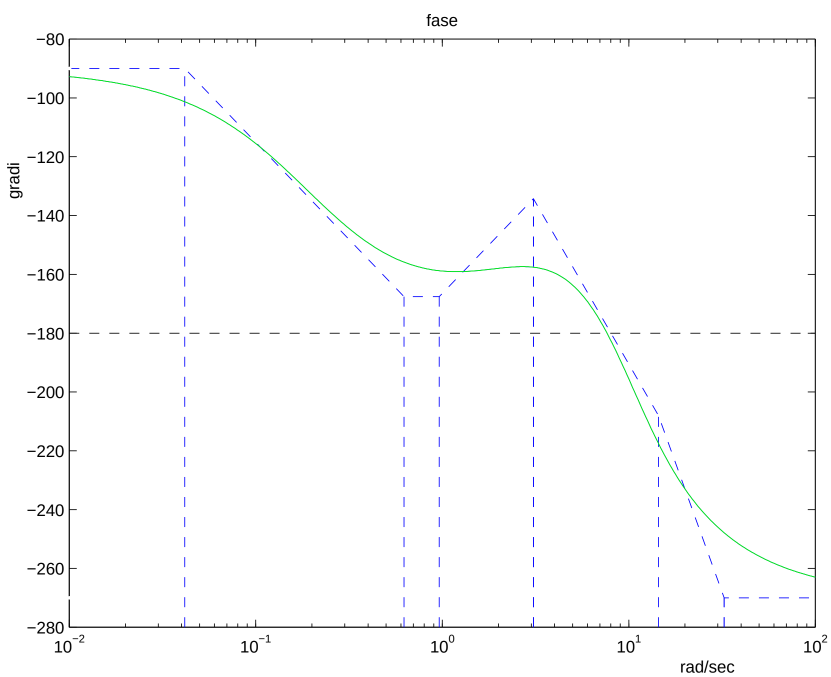
• **Esempio**. Consideriamo come esempio la seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1+\frac{s}{3}\right)}{s(1+5s)\left(1+\frac{3s}{20}+\frac{s^2}{100}\right)}$$

• Diagramma di Bode delle ampiezze:



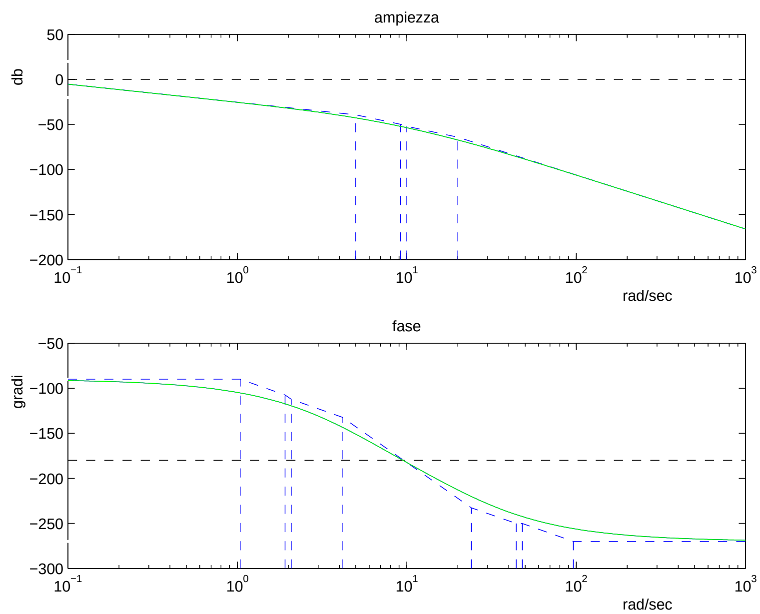
• Diagramma di Bode delle fasi:



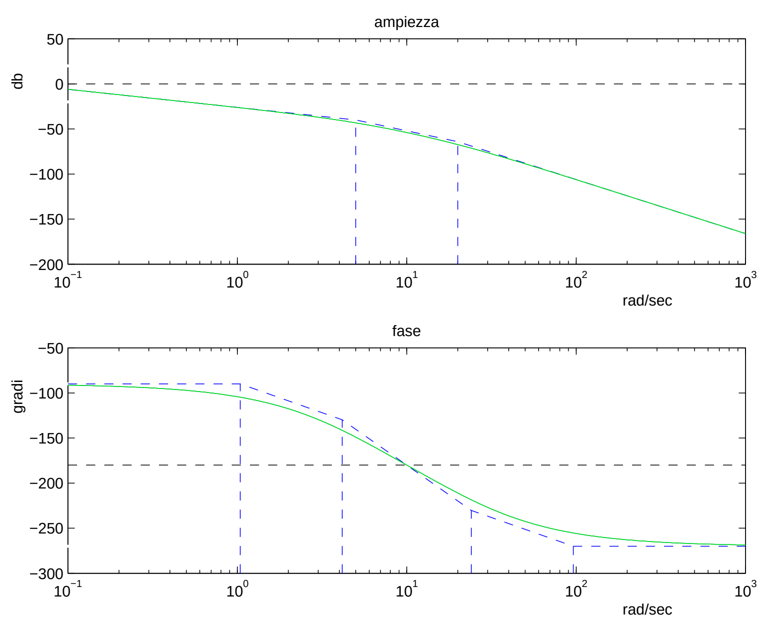
- NOTA: i diagrammi asintotici di Bode sono un'approssimazione dell'andamento reale della funzione di risposta armonica. Per tale motivo è possibile semplificare le coppie di poli e zeri che danno un contributo quasi uguale e contrario, senza alterare apprezzabilmente il diagramma risultante. Esempio:

$$H_1(s) = \frac{5(s+10)}{s(s+5)(s+9.2)(s+20)} \simeq \frac{5}{s(s+5)(s+20)} = H_2(s)$$

- Funzione $H_1(s)$



- Funzione $H_2(s)$



Uso dei diagrammi di Bode

1. Determinare la risposta temporale di un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale senza ricorrere alle antitrasformate. Consideriamo il sistema con ingresso x e uscita y descritto dalla solita funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} \rightarrow Y(s) = G(s)X(s)$$

   Applicando in ingresso il segnale $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ la risposta temporale $y(t)$ del sistema è data da:

$$y(t) = A\,|G(j\omega)| \sin\left[\omega t + \alpha + \arg(G(j\omega))\right]$$

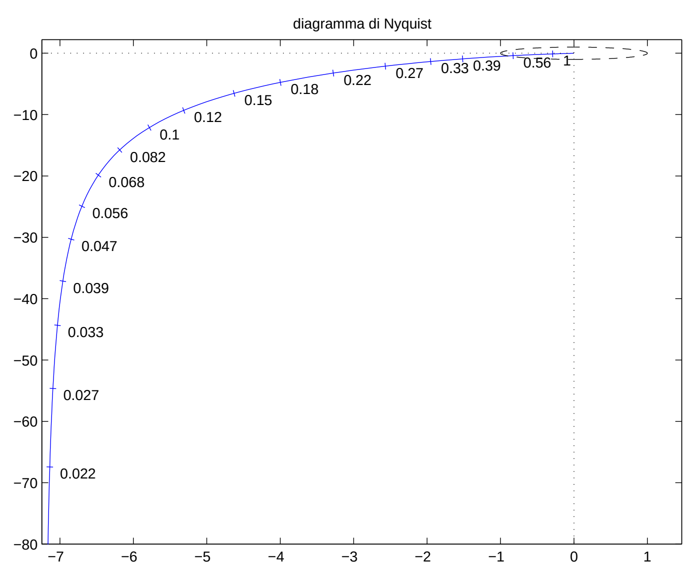
   dove $|G(j\omega)|$ e $\arg(G(j\omega)$ si ricavano rispettivamente dai diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi. Esempio, per $\omega = 1$ si ha:

$$|G(j\omega)| \simeq -10|_{\text{db}} \simeq 0.32$$
$$\arg(G(j\omega) \simeq -160^o \simeq 2.8 \text{ rad}$$

   e quindi

$$y(t) = A\,|G(j\omega)| \sin\left[\omega t + \alpha + \arg(G(j\omega))\right] = 0.32\ A\sin\left[t + \alpha + 2.8\right]$$

2. Tracciare i diagrammi polari di Nyquist:



3. Studio della stabilità di un sistema.