

## Lezione VII: Trasformata Zeta

- Traformata Zeta: Definizione
- Segnali elementari
- Proprietà della Trasformata Zeta
- Antitrasformata Zeta
- Esempi ed applicazioni

## Trasformata Zeta: Definizione

La *Trasformata Zeta* di un segnale discreto  $f(k)$  (successione numerica) è la funzione di variabile complessa  $z \in \mathbb{C}$ , ( $z = \sigma + j\omega$ )

$$f(k) \rightarrow F(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \doteq \mathcal{Z}[f]$$

**Trasformate Zeta di alcuni segnali elementari:**

- Funzione impulso discreto (*delta di Kronecker*)

$$f(k) = \delta(k) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases} \implies \mathcal{Z}[\delta] = F(z) = 1$$

- Funzione *gradino discreto*

$$f(k) = 1(k) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases} \implies \mathcal{Z}[1] = F(z) = \frac{z}{z-1}$$

## Trasformata Zeta: Segnali elementari

| SEGNALE                  | $f(k)$                          | $F(z)$  |
|--------------------------|---------------------------------|---|
| Impulso unitario         | $\delta(k)$                     | 1   |
| Gradino unitario         | $1(k)$                          | $\frac{z}{z-1}$   |
| Rampa unitaria           | $k \cdot 1(k)$                  | $\frac{z}{(z-1)^2}$   |
| Parabola unitaria        | $k^2 \cdot 1(k)$                | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$                                      |
| Esponenziale             | $a^k \cdot 1(k)$                | $\frac{z}{z-a}$   |
| Esponenziale + senoide   | $a^k \sin(\omega k) \cdot 1(k)$ | $\frac{a \sin(\omega) z}{z^2 - 2a \cos(\omega) z + a^2}$      |
| Esponenziale + cosenoide | $a^k \cos(\omega k) \cdot 1(k)$ | $\frac{z[z - a \cos(\omega)]}{z^2 - 2a \cos(\omega) z + a^2}$ |

## Trasformata Zeta: Proprietà

- **Linearità:**  $c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) \rightarrow c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$ ,

Esempio:  $3\delta(k) - \frac{5}{2^k} \cdot 1(k) \implies F(z) = 3 - \frac{5z}{z-\frac{1}{2}}$

- **Anticipo temporale:**  $f(k+1)1(k) \rightarrow zF(z) - zf(0)$  ( $z$  operatore di anticipo unitario)

Esempio:  $a^{k+1}1(k) \implies F(z) = z\frac{z}{z-a} - z = \frac{az}{z-a}$

- **Ritardo temporale:**  $f(k-1)1(k-1) \rightarrow z^{-1}F(z)$  ( $z^{-1}$  operatore di ritardo unitario)

Esempio:  $1(k-1) \implies F(z) = \frac{1}{z-1}$

- **Teorema della derivata nella frequenza:**  $kf(k) \rightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$

Esempio:  $k \cdot 1(k) \implies F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

- **Teorema di convoluzione:** Si definisce convoluzione di due segnali  $f(k)$  e  $g(k)$

$$(f * g)(k) \doteq \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)f(k-i)$$

$$\implies \mathcal{Z}[(f * g)(k)] = \mathcal{Z}[f(k)]\mathcal{Z}[g(k)] = F(z)G(z)$$

- **Teorema del valore finale:**  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$ .

Esempio:

$$f(k) = 1(k) + (-0.5)^k 1(k) \quad \rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0.5}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = 1$$

- **Teorema del valore iniziale:**  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ .

Esempio:

$$f(k) = (1-k)1(k) \quad \rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1$$

## Anti-Trasformata Zeta di Funzioni Razionali

- Espansione in fratti semplici di  $F(z)$  (radici  $p_i$  semplici):

$$F(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i z}{z - p_i}, \quad \alpha_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) F(z)$$

$\alpha_i$  è detto *residuo* di  $F(z)$  in  $p_i \in \mathbf{C}$ . Antitrasformando

$$f(k) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i^{k-1} \right) \mathbf{1}(k-1)$$

- Espansione in fratti semplici di  $F(z)$  (radici  $p_i$  di generica molteplicità  $m_i$ ):

$$F(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^l (z - p_i)^{m_i}} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - p_i)^j}, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{(m_i - j)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{d^{(m_i-j)}}{dz^{(m_i-j)}} (z - p_i)^{m_i} F(z)$$

Antitrasformando

$$f(k) = \left[ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \binom{k-1}{j-1} p_i^{k-j} \right] \mathbf{1}(k-1)$$

- Se esiste una coppia di radici  $p_i, \bar{p}_i$  complesse coniugate allora:

$$F'(z) = \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \frac{\bar{\alpha}_i}{z - \bar{p}_i} \quad \text{con} \quad p_i = \rho_i e^{j\omega_i}$$

$$f'(k) = \left[ \alpha_i \rho_i^{(k-1)} e^{j\omega_i(k-1)} + \bar{\alpha}_i \rho_i^{(k-1)} e^{-j\omega_i(k-1)} \right] \mathbf{1}(k-1)$$

$$= 2|\alpha_i| \rho_i^{(k-1)} \cos [\omega_i(k-1) + \angle \alpha_i] \mathbf{1}(k-1)$$

- **Possibili applicazioni:** soluzione di equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti

Esempio:

$$y(k+4) - y(k+3) + y(k+2) - y(k+1) = u(k+2) + u(k+1) + u(k) \quad k \geq 0$$

con ingresso  $u(k) = \mathbf{1}(k)$  e condizioni iniziali  $y(0) = y(1) = y(2) = 0$  ,  $y(3) = 1$ .