Lezione VII: Trasformata Zeta

- Traformata Zeta: Definizione
- Segnali elementari
- Proprietà della Trasformata Zeta
- Antitrasformata Zeta
- Esempi ed applicazioni

Trasformata Zeta: Definizione

La *Trasformata Zeta* di un segnale discreto $f(k)$ (successione numerica) è la funzione di variabile complessa $z \in \mathbf{C}$, $(z = \sigma + j\omega)$

$$f(k) \to F(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \doteq \mathcal{Z}[f]$$

Trasformate Zeta di alcuni segnali elementari:

- Funzione impulso discreto (*delta di Kronecker*)

$$f(k) = \delta(k) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad k = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{Z}[\delta] = F(z) = 1$$

- Funzione *gradino discreto*

$$f(k) = 1(k) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k < 0 \\ 1 & \text{se} \quad k \geq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{Z}[1] = F(z) = \frac{z}{z-1}$$

Trasformata Zeta: Segnali elementari

SEGNALE	$f(k)$	$F(z)$
Impulso unitario	$\delta(k)$	1
Gradino unitario	$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
Rampa unitaria	$k\ 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
Parabola unitaria	$k^2\ 1(k)$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
Esponenziale	$a^k\ 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
Esponenziale + sinusoide	$a^k \sin(\omega k)\ 1(k)$	$\dfrac{a \sin(\omega) z}{z^2 - 2a\cos(\omega) z + a^2}$
Esponenziale + cosinusoide	$a^k \cos(\omega k)\ 1(k)$	$\dfrac{z[z - a\cos(\omega)]}{z^2 - 2a\cos(\omega) z + a^2}$

Trasformata Zeta: Proprietà

- Linearità: $c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) \to c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$,
  Esempio: $3\delta(k) - \frac{5}{2^k} \cdot 1(k) \Longrightarrow F(z) = 3 - \frac{5z}{z-\frac{1}{2}}$

- Anticipo temporale: $f(k+1)1(k) \to zF(z) - zf(0)$ (z operatore di anticipo unitario)
  Esempio: $a^{k+1}1(k) \Longrightarrow F(z) = z\frac{z}{z-a} - z = \frac{az}{z-a}$

- Ritardo temporale: $f(k-1)1(k-1) \to z^{-1}F(z)$ (z^{-1} operatore di ritardo unitario)
  Esempio: $1(k-1) \Longrightarrow F(z) = \frac{1}{z-1}$

- Teorema della derivata nella frequenza: $kf(k) \to -z\frac{d}{dz}F(z)$
  Esempio: $k \cdot 1(k) \Longrightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

- Teorema di convoluzione: Si definisce convoluzione di due segnali $f(k)$ e $g(k)$

$$(f*g)(k) \doteq \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)f(k-i)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Z}[(f*g)(k)] = \mathcal{Z}[f(k)]\mathcal{Z}[g(k)] = F(z)G(z)$$

- Teorema del valore finale: $\lim_{k\to+\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$.

  Esempio:

$$f(k) = 1(k) + (-0.5)^k 1(k) \quad \rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0.5}$$

$$\lim_{k\to+\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = 1$$

- Teorema del valore iniziale: $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$.

  Esempio:

$$f(k) = (1-k)1(k) \quad \rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 1$$

Anti-Trasformata Zeta di Funzioni Razionali

- Espansione in fratti semplici di $F(z)$ (radici p_i semplici):

$$F(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)} = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\ z}{z-p_i}, \qquad \alpha_i = \lim_{z\to p_i}(z-p_i)F(z)$$

α_i è detto *residuo* di $F(z)$ in $p_i \in \mathbf{C}$. Antitrasformando

$$f(k) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i^{k-1}\right)1(k-1)$$

- Espansione in fratti semplici di $F(z)$ (radici p_i di generica molteplicità m_i):

$$F(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\alpha_{ij}}{(z-p_i)^j}\ , \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{(m_i-j)!}\lim_{z\to p_i}\frac{d^{(m_i-j)}}{dz^{(m_i-j)}}(z-p_i)^{m_i}F(z)$$

Antitrasformando

$$f(k) = \left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} p_i^{k-j}\right]1(k-1)$$

- Se esiste una coppia di radici p_i, $\overline{p}_i$ complesse coniugate allora:

$$F'(z) = \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \frac{\overline{\alpha}_i}{z - \overline{p}_i} \qquad \text{con} \qquad p_i = \rho_i e^{j\omega_i}$$

$$f'(k) = \left[\alpha_i \rho_i^{(k-1)} e^{j\omega_i(k-1)} + \overline{\alpha}_i \rho_i^{(k-1)} e^{-j\omega_i(k-1)}\right] 1(k-1)$$

$$= 2|\alpha_i| \rho_i^{(k-1)} \cos\left[\omega_i(k-1) + \angle\alpha_i\right] 1(k-1)$$

- Possibili applicazioni: soluzione di equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti

  Esempio:

$$y(k+4) - y(k+3) + y(k+2) - y(k+1) = u(k+2) + u(k+1) + u(k) \quad k \geq 0$$

con ingresso $u(k) = 1(k)$ e condizioni iniziali $y(0) = y(1) = y(2) = 0$, $y(3) = 1$.